Вариант 1

1. **(2 балла)** Заданы 10 различных натуральных чисел, не превосходящих 23. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a,b,c,d, для которых $\frac{a+b}{2}=\frac{c+d}{2}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:
   1) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
   2) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$;
   3) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

   Других действий автомат выполнять не может.

   Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(1037;1159)$, не позволят получить на ней запись $(611;1081)$.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x))=x$, если известно, что $f(x)=x^2+5x+1$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 0&1&2&3&4&5&6&7\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 7&6&5&4&3&2&1&0\\ 7&6&5&4&3&2&1&0 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+4y=y^3+16x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=5 \end{cases}.$$

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности радиуса 3, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между хордой AC и касательной AD, который не содержит хорды AB, равен $\frac{5\pi}{12}$. Вычислите целую площади треугольника ABC.

Вариант 2

1. **(2 балла)** Заданы 11 различных натуральных чисел, не превосходящих 27. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a,b,c,d, для которых $\frac{a+b}{5}=\frac{c+d}{5}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

   1) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
   2) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$
   3) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

   Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(901;1219)$, не позволят получить на ней запись $(871;1273)$.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f\left(f\left(x\right)\right)=x$, если известно, что $f\left(x\right)=x^2+2x-5$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 7&7&7&7&0&0&0&0\\ 6&6&6&6&1&1&1&1\\ 5&5&5&5&2&2&2&2\\ 4&4&4&4&3&3&3&3\\ 3&3&3&3&4&4&4&4\\ 2&2&2&2&5&5&5&5\\ 1&1&1&1&6&6&6&6\\ 0&0&0&0&7&7&7&7 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+2y=y^3+14x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=3 \end{cases}.$$

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\frac{\pi}{6}$, а угол между хордой AC и касательной AD, который не содержит хорды AB, равен $\frac{5\pi}{12}$. Вычислите целую часть радиуса окружности, если площадь треугольника ABC равна 32.

Вариант 3

1. **(2 балла)** Заданы 12 различных натуральных чисел, не превосходящих 32. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a,b,c,d, для которых $\frac{a+b}{4}=\frac{c+d}{4}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

1) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
2) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$
3) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(1139;871)$, не позволят получить на ней запись $(1007;1219)$.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x))=x$, если известно, что $f(x)=x^2-3x-4$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+y=y^3+16x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=2 \end{cases}.$$

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности радиуса $\sqrt{6}$, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\frac{\pi}{6}$, а угол между хордой AC и касательной AD равен $\frac{7\pi}{12}$. Вычислите целую площади треугольника ABC.

Вариант 4

1. **(2 балла)** Заданы 9 различных натуральных чисел, не превосходящих 18. Докажите, что среди них найдутся четыре различных числа a,b,c,d, для которых $\frac{a+b}{7}=\frac{c+d}{7}$.

2. **(3 балла)** Автомат работает с магнитной карточкой, на которой может быть записана любая пара натуральных чисел. С записью $(m;n)$ он умеет совершать любое из следующих действий:

1) менять числа местами: $(m;n)\to(n;m)$;
2) заменять первое число суммой первого и второго: $(m;n)\to(m+n;n)$
3) заменять второе число модулем разности первого и второго: $(m;n)\to(m;|m-n|)$.

Других действий автомат выполнять не может.

Докажите, что никакие манипуляции с автоматом и карточкой, на которой изначально записаны числа $(1943;737)$, не позволят получить на ней запись $(799;1081)$.

3. **(4 балла)** Решите уравнение вида $f(f(x))=x$, если известно, что $f(x)=x^2+4x-3$.

4. **(4 балла)** На шахматную доску нанесены числа (см. рис. 1). Сколько существует расстановок 8 ладей, не бьющих друг друга, при которых на местах, занимаемых ладьями, встречаются все числа от 0 до 7?

$$\begin{pmatrix} 0&0&0&0&7&7&7&7\\ 1&1&1&1&6&6&6&6\\ 2&2&2&2&5&5&5&5\\ 3&3&3&3&4&4&4&4\\ 4&4&4&4&3&3&3&3\\ 5&5&5&5&2&2&2&2\\ 6&6&6&6&1&1&1&1\\ 7&7&7&7&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

Рис.1.

5. **(5 баллов)** Решите систему уравнений:

$$\begin{cases} x^3+6y=y^3+12x \\ \dfrac{y^2+1}{x^2+1}=7 \end{cases}.$$

6. **(5 баллов)** Из точки A, лежащей на окружности, проведены хорды AB, AC и касательная AD. Угол между хордами равен $\frac{\pi}{4}$, а угол между хордой AC и касательной AD равен $\frac{7\pi}{12}$. Вычислите целую часть радиуса окружности, если площадь треугольника ABC равна 25.